ESERCIZI DI ARITMETICA

1. Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza nel seguente modo: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Dimostrare che tale successione è crescente e limitata da 2.

2. Sia a_n la successione definita per ricorrenza da $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Dimostrare che $a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$.

3. Sia a_n la successione di Fibonacci definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

   a) Dimostrare che due termini successivi sono primi tra loro.

   b) In quanti passi termina l'algoritmo di Euclide applicato alla coppia (a_{n+1}, a_n) con $n \geq 1$?

4. Quante sono le permutazioni di 7 elementi che lasciano fissi esattamente 3 elementi?

5. Siano $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ e $Y = \{1, 2, \ldots, 15\}$.

   a) Contare le funzioni $f : X \to Y$ con la proprietà $f(i) < f(j)$ per ogni $1 \leq i < j \leq n$.

   b) Contare le funzioni $f : X \to Y$ con la proprietà $f(i) \leq f(j)$ per ogni $1 \leq i < j \leq n$.

6. Quante sono le bigezioni f dell'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con la proprietà $f(i) \neq i$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

7. Sia $\mathcal{C} = \{[0], [1], [2], \ldots, [p-1]\}$ l'insieme delle classi di congruenza modulo p, con p primo. Dimostrare che, fissata una classe $[a] \in \mathcal{C}$, l'applicazione

$$\mathcal{C} \ni [b] \mapsto [ab] \in \mathcal{C}$$

   è ben definita e bigettiva.

8. (*) Quante sono le funzioni surgettive da un insieme con n elementi ad un insieme con m elementi?

9. (*) Sia X un insieme (anche infinito). Dimostrare che non esiste alcuna bigezione tra X e l'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle sue parti.

10. (*) Sia $n \geq 1$. Dimostrare che $\binom{2^n}{i}$ è pari per $i \neq 0, 2^n$.

11. (*) Sia $n \geq 1$. Dimostrare che $\binom{2^n-1}{i}$ è dispari per $0 \leq 1 \leq 2^n - 1$.

12. Dimostrare che se un numero razionale q è radice di un polinomio monico a coefficienti interi, allora q è un intero. (Un polinomio p si dice *monico* se il coefficiente del termine di grado più alto in p è 1.)

13. Trovare tutte le soluzioni intere di ognuna delle seguenti equazioni

    $12x + 20y + 13z = 0$;

    $441x^2 + 36y^2 + 252xy = 9$;

    $5x + 10y = 100$. Quante soluzioni in interi positivi ha questa equazione?

14. Determinare, in funzione di n, il numero di soluzioni in interi non negativi dell'equazione $2x + 3y = n$.

15. Determinare il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione $x^2 + 7y = 10000$.

16. Determinare il numero dei divisori positivi di 72000 nella cui fattirozzazione compare

    i) un numero dispari di fattori primi;

    i) un numero dispari di fattori primi distinti.

17. Determinare tutti i numeri naturali n tali che $\Phi(n) = 12$.

18. Determinare la cardinalità dell' insieme $\{d \in \mathbb{N} \mid d | 3^{40}5^{25},\ d \equiv 1 \pmod 7\}$.

19. Determinare il numero delle coppie $(x, y) \in (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^2$ tali che $24(x + y) \equiv 0 \pmod{100}$.

20. Determinare le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{10} \\ x \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$$

21. Consideriamo il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{3} \\ 3x \equiv 1 \pmod{5} \\ 2x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Quante sono le soluzioni x del sistema con $0 \leq x < 1050$?

Quante sono le soluzioni con $0 \leq x < 1000$?

22. Determinare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{15} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

23. Determinare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x^2 \equiv -1 \pmod{7} \\ 6x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

24. Determinare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 6 \equiv 0 \pmod{35} \\ (x, 10) = 1 \end{cases}$$

25. Contare le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ tali che $1 \leq x \leq 1000$, del seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x \equiv 7 \pmod{12} \\ 2x \equiv 1 \pmod{9} \end{cases}$$

26. Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} (x, 10) = 5 \\ 415x \equiv -10 \pmod{45} \end{cases}$$

27. Risolvere le seguenti congruenze:

    i) $7^x \equiv 4 \pmod{11}$;

    ii) $5^x \equiv 8 \pmod{13}$

    iii) $x^2 + 3x + 15 \equiv \pmod{55}$.